1780

Considerationes circa brachystochronas

Leonhard Euler

CONSIDERATIONES CIRCA BRACHYSTOCHRONAS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Problema I.

Tab. I. Fig. 1. *Inuenire curuas Brachystochronas* A M, *super quibus corpus breuissimo tempore ex* A *in* M *perueniat, dum scilicet, a grauitate naturali animatum, descensum in puncto* A *incohat.*

Solutio.

Sumto axe A P verticali sint pro curua quaesita coordinatae A P $= x$ et P M $= y$, atque ex natura motus constat fore celeritatem in puncto M $= 2\sqrt{g x}$, denotante g altitudinem lapsus vno minuto secundo, ita vt formula $2\sqrt{gx}$ denotet spatium vno minuto secundo hac velocitate percurrendum. Quum nunc, posito $dy = p\,dx$, sit elementum curuae M $m = dx\sqrt{(1+pp)}$, erit tempus descensus per arcum A M $= \int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, idque in minutis secundis expressum; quae formula, quum debeat esse minimum, si comparetur cum formula illa generali in dissertatione: *Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi* Vid. *Comment. Nouor. Tom. XVI.* scil. cum $\int Z\,dx$, dat $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$; et quia ibi posuimus $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, habebimus pro nostro casu $M = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{4x\sqrt{gx}}$, $N = 0$, $P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1+pp)}}$; quare, vt prima pars variationis ad nihilum redigatur, fieri oportet $0 = N - \frac{dP}{dx}$, hoc est $\frac{dP}{dx} = 0$, vnde fit $P = C$.

Po-

§. 2. Ponatur ergo ad vniformitatem obtinendam $\frac{p}{2\sqrt{gx(1+pp)}} = \frac{1}{2\sqrt{ga}}$, vt fiat $p\sqrt{a} = \sqrt{x(1+pp)}$, vnde colligitur $p = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$; nunc ob $dy = p\,dx$ pro curua quaesita nanciscimur hanc aequationem differentialem $dy = dx\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, pro cuius integrali inueniendo capiatur in axe interuallum $AB = a$ et super AB tamquam diametro describatur semicirculus ANB, in quo erit applicata $PN = \sqrt{(ax-xx)}$, hinc

$$d.PN = \frac{\frac{1}{2}a\,dx - x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$$

et differentiale arcus

$$d.AN = \frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}},$$

atque hinc colligimus $d.AN - d.PN = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}} = dy$, vnde patet esse $PM = y = AN - PN$; ex quo manifestum est; curuam inuentam esse cycloidem, prouolutione circuli, cuius diameter est a, sub recta horizontali AC natam.

§. 3. Deinde etiam patet arcum curuae quaesitae fore $AM = \int dx\sqrt{(1+pp)} = \int\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}} = 2a - 2\sqrt{(aa-ax)}$. Iam vero quum sit $BP = a - x$, ducta chorda BN media proportionalis inter BP et BA erit haec chorda $BN = \sqrt{(aa-ax)}$, sicque fit arcus $AM = 2AB - 2BN$. Promoueatur punctum P ad B vsque, quo pacto curua AM porrigetur vsque in E eritque E punctum cycloidis imum, ibique applicata $BE =$ arcui ANB, tum vero arcus $AME = 2AB$; hinc ergo prodibit arcus $EM = 2BN$. Dehinc vero continuetur curua AME vltra E, donec ad horizontalem redeat in D, eritque $AD = 2ANB$.

§. 4. Quoniam vero porro variatio continet membrum $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)P$, vbi P est quantitas constans, euidens est

hanc

hanc partem variationis non euanescere nisi sit $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, atque hinc demum veram indolem huius quaestionis intelligimus, qua curua inuenta A M non absolute inter omnes curuas, sed inter eas tantum, quae per vtrumque terminum A et M transeunt, minimo gaudet tempore descensus.

§. 5. Inuestigemus autem etiam ipsum tempus, quo corpus ex A ad M pertingit, quod hac formula exprimitur

$$= \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}} = \int \frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{gx(a-x)}} = \frac{1}{\sqrt{ga}} \int \frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{1}{\sqrt{ga}} \int d.\,\mathrm{A.N},$$

sicque ipsum tempus per arcum A M in minutis secundis expressum $= \frac{\mathrm{AN}}{\sqrt{ga}}$. Quare si ratio diametri ad peripheriam statuatur $1 : \pi$, fiet arcus A N B $= \frac{1}{2}\pi a$; porro erit tempus descensus ad punctum imum per arcum A E $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$, cuius duplum dabit tempus per arcum A E D, quod ergo est $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, ipsum vero spatium A D $= \pi a$.

§. 6. Notetur hic corpus quod in A quieuerat per solam grauitatis actionem in locum D transferri posse, cogitationem quidem ab omni resistentia abstrahendo; atque si spatium hoc A D vocetur $= s$, vt sit $a = \frac{s}{\pi}$, tempus, quo hoc modo corpus ex A in D pertingit, erit $= \frac{\sqrt{\pi s}}{\sqrt{g}}$, quod ergo tempus erit vnum minutum secundum, si capiatur $s = \frac{g}{\pi}$, atque hoc tempus est breuissimum, quo corpus ex A in D transferri potest, atque in genere corpus hoc modo per spatium quodcunque A D $= s$ transferetur eodem tempore, quo per altitudinem πs delabi potest.

§. 7. Quoniam formula, quae in hac curua est minimum, erat $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, ea pertinet ad casum quem in dissertatione citata §. 43. sumus contemplati; quare si ad nostram curuam in puncto M ducatur normalis M ω, omnes curuae proximae ipsi A M, quae ad hanc

rectam

rectam $M\mu$ terminantur, hanc quoque habebunt proprietatem, vt pro iis variatio sit nulla, hoc est vt omnes illae curuae aequalibus temporibus percurrantur; siquidem, quod probe notandum, omnes in eodem puncto A incipiant. Haec igitur recta $M\mu$, quae ab omnibus curuis proximis arcus synchronos abscindit, eos simul orthogonaliter secat.

§. 8. Quoniam aequatio pro curua AM inuenta $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ est adhuc differentialis, per integrationem praeter constantem a, alia constans arbitraria ingredietur, cuius efficí potest vt initium curuae in datum punctum A incidat, quare si hoc punctum fuerit fixum, integrationem ita absolui conuenit, vt sumto $x = 0$, simul fiat $y = 0$. Quia autem adhuc constantem a pro arbitrio assumere licet, manifestum est aequationem nostram infinitas continere lineas curuas: omnes scilicet cycloides a circulis quibuscunque genitas et in eodem puncto A inchoantes, quae omnes inter se sunt similes, atque hinc sequens Problema resoluere poterimus.

Problema II.

§. 9. *Descriptis super recta horizontali AD infinitis cycloidibus, quae omnes in eodem puncto A incipiant, inuenire lineam curuam, quae omnes has cycloides ad angulos rectos traiciat.*

Solutio.

§. 10. Sit curua AM vna quaecunque harum cycloidum, quae nata sit ex circulo ANB, cuius diameter ergo vel radius hic vt variabilis est considerandus, vt ex eius variatione generatio omnium reliquarum cycloidum intelligi possit. Quum igitur quaestio huc sit reducta, vt ab omnibus his cycloidibus arcus synchronos AM abscindi opor- Tab. I. Fig. 1.

teat, tempus autem descensus per arcum A M supra ita expressum sit inuentum $= \frac{AN}{\sqrt{g a}} = \frac{AN}{\sqrt{g.AB}}$, in omnibus his circulis vtcunque variatis perpetuo tantos arcus A N abscindi oportet, vt fiat $\frac{AN}{\sqrt{g.AB}} =$ quantitas constans, tum vero ex singulis punctis N reperientur totidem puncta M, sumendo $PM = AN - PN$, siue concinnius $NM = AN$; atque omnia haec puncta M determinabunt traiectoriam quam quaerimus.

§. 11. Ponamus huius circuli indefiniti radium $AO = BO = r$, vt sit $AB = 2r$, et vocemus angulum $AON = \Phi$, eritque arcus $AN = r\Phi$ et applicata $PN = r \sin.\Phi$, abscissa vero $AP = r(1 - \cos.\Phi)$, quae si vocetur $= x$, eique respondens applicata traiectoriae $PM = y$, iam habebimus has determinationes: $x = r(1 - \cos.\Phi)$ et $y = r(\Phi - \sin.\Phi)$. Verum hic talis relatio inter r et Φ subsistere debet, vt fractio $\frac{AN}{\sqrt{g.AB}} = \frac{r\Phi}{\sqrt{2gr}} = \frac{\Phi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$ semper constantem obtineat valorem.

§. 12. Statuamus ergo $\Phi\sqrt{r} = \sqrt{c}$, vt fiat $r = \frac{c}{\Phi^2}$, quo valore introducto pro coordinatis traiectoriae quaesitae habebimus has formulas:

$AP = x = \frac{c}{\Phi^2}(1 - \cos.\Phi)$ et $PM = y = \frac{c}{\Phi} - \frac{c \sin.\Phi}{\Phi^2} = \frac{c}{\Phi^2}(\Phi - \sin.\Phi)$.

Hinc autem pro directione curuae cognoscenda iuuabit etiam differentialia adnotasse, quae reperiuntur:

$dx = c\, d\Phi \left(\frac{\Phi \sin.\Phi - 2 + 2\cos.\Phi}{\Phi^3}\right)$; $dy = c\, d\Phi \left(\frac{-\Phi - \Phi\cos.\Phi + 2\sin.\Phi}{\Phi^3}\right)$

vnde anguli, quem tangens traiectoriae in M facit cum axe A B, tangens prodit:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{-\Phi - \Phi\cos.\Phi + 2\sin.\Phi}{2 - 2\cos.\Phi - \Phi\sin.\Phi} = \frac{\Phi(1 + \cos.\Phi) - 2\sin.\Phi}{\Phi\sin.\Phi - 2(1 - \cos.\Phi)}$$

quae fractio reducitur ad hanc:

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}\Phi(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}{\sin.\frac{1}{2}\Phi(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}$$

ita

ita vt habeamus $\frac{dy}{dx} = -\cot.\frac{1}{2}\Phi$; vnde patet angulum illum, cuius tangens est $-\frac{dy}{dx}$, fore $= 90^\circ - \frac{1}{2}\Phi$. Hinc porro, si elementum curuae vocetur ds erit $\frac{dx}{ds} = \sin.\frac{1}{2}\Phi$ et $\frac{dy}{ds} = -\cos.\frac{1}{2}\Phi$, vnde colligitur

$$ds = c\,d\Phi\frac{(\Phi \sin.\Phi - 2(1 - \cos.\Phi))}{\Phi^3 \sin.\frac{1}{2}\Phi}$$

$$\text{seu } ds = 2c\,d\Phi\frac{(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3},$$

vnde per reductiones obtinemus:

$$[illegible]\frac{\sin.\frac{1}{2}\Phi}{[illegible]\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} - \frac{\sin.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} - \frac{1}{2}\frac{\cos.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi} - \frac{1}{4}\int\frac{d\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi}$$

denique radius osculi traiectoriae in puncto M est

$$r = 4c\frac{(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3}$$

qui ergo etiam hoc modo exprimi potest:

$$\frac{2ds}{d\Phi} = \frac{2dx}{d\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi} = \frac{-2dy}{d\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi} = \frac{-dx}{d.\cos.\frac{1}{2}\Phi} = \frac{+dy}{d.\sin.\frac{1}{2}\Phi}.$$

§. 13. His praenotatis in praecipua symptomata et proprietates huius traiectoriae inquiramus, ac primo quidem sumamus angulum $\Phi = 0$, seu infinite paruum, atque reperiemus abscissam $x = \frac{c}{2}$ et applicatam $y = 0$. Sumatur ergo in axe verticali altitudo $AG = \frac{1}{2}c$, eritque punctum G initium traiectoriae sursum vergentis, quae ad verticalem erit normalis ob $\frac{dy}{dx} = \infty$, at vero radius osculi in hoc puncto G erit $4c\frac{(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3}$, posito $\Phi = 0$, qui valor reperitur $= \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}AG$. Hic notasse iuuabit, tempus descensus per hanc altitudinem AG praecise conuenire cum tempore omnium arcuum synchronorum AM. Tab. I. Fig. 2.

Crescente angulo Φ curua haec sursum
§. 14. sumamus angu-
flectitur, ad cuius tractum cognoscendum lum $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$ eritque sin. $\frac{1}{2}\Phi =$ cos. $\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vnde ab-
scissa $x = \frac{4c}{\pi^2}$ et applicata $y = \frac{4c}{\pi\pi}(\frac{\pi}{2} - 1)$; hoc porro loco
$-\frac{dy}{dx} = 1$, quod indicat, tangentem in hoc puncto cum
adplicata angulum semirectum facere. Hic vero radius osculi
erit $\frac{16c(\pi - 4)}{\pi^3\sqrt{2}}$, vel mutato signo, vti etiam pro puncto G
fecimus, erit radius osculi $= \frac{16c(4 - \pi)}{\pi^3\sqrt{2}}$, cuius valor est pro-
pemodum $0,313.c$ ideoque paulisper minor quem in
puncto G.

§. 15. Sumamus nunc $\Phi = 180° = \pi$, et abscissa
prodibit $x = \frac{2c}{\pi\pi}$ et applicata $y = \frac{c}{\pi}$; tum vero fit $-\frac{dy}{dx} = 0$,
vnde tangens curuae in hoc puncto erit verticalis, ac
propterea ista applicata PM omnium maxima. Per fra-
ctiones autem decimales pro hoc puncto reperitur abscissa
$x = 0,2026.c$ et $y = 0,318.c$. Radius osculi denique in
hoc puncto colligitur mutato signo $= \frac{8c}{\pi^3}$, proxime $= 0,258.c$
sicque curuatura continuo diminuitur.

§. 16. Ponamus nunc $\Phi = 2\pi$, vt fiat sin. $\frac{1}{2}\Phi = 0$,
cos. $\frac{1}{2}\Phi = -1$; ibi ergo erit abscissa $x = 0$ et applicata
$y = \frac{c}{2\pi}$. Hic ergo curua ad summam lineam horizontalem
pertingit, eiusque distantia a puncto A semissis est appli-
catae maximae, quippe quae erat $\frac{c}{\pi}$. Quum vero hic fiat
$-\frac{dy}{dx} = \infty$, tangens curuae erit ipsa recta horizontalis su-
prema. Hoc porro loco radius osculi colligitur $= \frac{c}{\pi\pi}$, proxime
$= 0,101.c$, ita vt adhuc curuatura diminuatur.

§. 17. Statuamus porro $\Phi = 3\pi$, vt fiat

$$\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\Phi = -1 \text{ et cos.}\ \tfrac{1}{2}\Phi = 0.$$

Pro hoc ergo loco fit abscissa $x = \frac{2c}{9\pi^2}$, proxime $= 0,022.c$
et

et applicata $y = \frac{c}{3\pi}$, tum vero ob $-\frac{dy}{dx} = o$, tangens in hoc loco erit verticalis, atque radius osculi $= -\frac{8c}{9\pi^3}$, vnde curua iam curuaturam mutauit, et, antequam huc peruenit, alicubi radius osculi euanuerit necesse est, quod euenit sumendo $\Phi = 2$ tang. $\frac{1}{2}\Phi$. Ad hunc locum inueniendum ponamus fuisse $\Phi = 3\pi - \omega$ eritque

$$3\pi - \omega = 2 \text{ tang.} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \text{cot.} \tfrac{1}{2}\omega$$

vnde patet angulum ω esse satis paruum. Ibi vero curua punctum flexus contrarii habuerit necessum est, ex quo sursum reflectendo ad eum locum pertingit, quem hic definiuimus.

§. 18. Ponendo iam $\Phi = 4\pi$, quo casu fit

$$\text{sin.} \tfrac{1}{2}\Phi = o \text{ et cos.} \tfrac{1}{2}\Phi = 1$$

abscissa euadit $x = o$ et applicata $y = \frac{c}{4\pi}$, hicque tangens iterum fit horizontalis ob $-\frac{dy}{dx} = \infty$; radius osculi vero reperitur $= -\frac{c}{4\pi\pi}$, qui scilicet est negatiuus ob cuspidem praecedentem. Hic ergo curuatura quadruplo maior est, quam casu $\Phi = 2\pi$.

§. 19. Ponamus nunc in genere $\Phi = 2n\pi$, existente n numero integro quocunque, et ob sin. $\Phi = o$ et cos. $\Phi = 1$ erit abscissa $AP = x = o$ et applicata

$$PM = y = \frac{c}{2n\pi} = \frac{0{,}159155 \cdot c}{n},$$

deinde quum sit

$$-\frac{dy}{dx} = \text{cot.} \tfrac{1}{2}\Phi = \text{tang. } ATM,$$

ita vt sit angulus $ATM = 90° - \frac{1}{2}\Phi$, erit hic angulus $ATM = 90° - n\pi$, hoc est rectus, seu tangens MT erit horizontalis; tum vero radius osculi in hoc loco erit

$$= -\frac{c \cos. n\pi}{nn\pi\pi} = -\frac{0{,}101321 \cdot c \cdot \cos. n\pi}{nn},$$

vbi cos. $n\pi$ est vel $+1$ vel -1, prouti n fuerit numerus vel par vel impar.

§. 20. At si fuerit $\Phi = (2n+1)\pi$, ob sin. $\Phi = 0$
et cos. $\Phi = -1$, erit abscissa

$$AP = x = \frac{2c}{(2n+1)^2 \pi\pi} = \frac{0,202642.\,c}{(2n+1)^2}$$ et applicata

$$PM = y = \frac{c}{(2n+1)\pi} = \frac{0,318310.\,c}{2n+1}$$

deinde vero prodit angulus

$$ATM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi = 90^\circ - \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

Radius osculi de-
siue tangens in his locis erit verticalis.
nique reperitur

$$= \frac{8\,c.\,\text{sin.}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}{(2n+1)^3 . \pi^3} = \frac{0,258012.\,c.\,\text{sin.}\,(n+\frac{1}{2})\,\pi}{(2n+1)^3}$$

vbi sin. $(n + \frac{1}{2}\pi)$ est vel $+1$ vel -1, prouti numerus n
fuerit vel par, vel impar.

§. 21. Iam obseruauimus paulisper ante ista loca
radium osculi euanescere ibique curuam cuspide esse do-
natam: singulas igitur has cuspides inuestigasse operae erit
pretium. Ex formula autem generali liquet, radium osculi
euanescere, quoties fuerit

$$\Phi = 2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \frac{2\,\text{sin.}\,\Phi}{1+\text{cos.}\,\Phi} = \frac{2(1-\text{cos.}\,\Phi)}{\text{sin.}\,\Phi}$$

quae aequatio innumerabiles admittit solutiones, vti mox
videbimus. Nunc autem pro his casibus statim manife-
stum est fore abscissam $x = \frac{c\,\text{sin.}\,\Phi^2}{4(1-\text{cos.}\,\Phi)} = \frac{c(1+\text{cos.}\,\Phi)}{4}$ et ap-
plicatam $y = \frac{1}{4}c.\,\text{sin.}\,\Phi$; tum vero in his cuspidibus tan-
gens ad verticalem inclinatur angulo $= 90^\circ - \frac{1}{2}\Phi$, atque
adeo ad horizontalem AD angulo $= \frac{1}{2}\Phi$.

§. 22. Quoniam istae cuspides reperiuntur in locis,
vbi angulus Φ aliquanto minor est quam $(2n+1)\pi$, ad
eas inueniendas ponamus $\Phi = (2n+1)\pi - 2\omega$, vt sit
$\frac{1}{2}\Phi = (n+\frac{1}{2})\pi - \omega$, qui ergo arcus aequari debet

$$= \text{tang.}\,((n+\tfrac{1}{2})\pi - \omega) = \frac{1}{\text{tang.}\,\omega} = \frac{\text{cos.}\,\omega}{\text{sin.}\,\omega}$$

ita vt habeatur haec aequatio: $(n+\frac{1}{2})\pi - \omega = \frac{\text{cos.}\,\omega}{\text{sin.}\,\omega}$, ex qua
quaeri oportet omnes valores anguli ω; vbi statim appa-
ret

ret, si numerus n esset infinitus, fore $\pi = 0$; ex quo intelligitur, quo maior sit numerus n, eo minorem prodire angulum ω. Ponamus ergo breuitatis gratia $(n+\frac{1}{2})\pi = \alpha$ et multiplicando per sin. ω habebimus α sin. $\omega - \omega$ sin. $\omega =$ cos. ω; sed quia angulus ω est satis exiguus, ideoque vero proxime sin. $\omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5$ et cos. $\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{24}\omega^4$ nostra aequatio hanc induet formam:

$$0 = 1 - \alpha\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\alpha\omega^3 - \frac{1}{8}\omega^4 - \frac{1}{120}\alpha\omega^5 + \frac{1}{144}\alpha\omega^6 + \frac{1}{5040}\alpha\omega^7.$$

§. 23. Si termini post duos priores negligantur, sequitur $\omega = \frac{1}{\alpha}$, qui ergo est valor prope verus; pro vero ergo ponamus

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{\alpha^3} + \frac{B}{\alpha^5} + \frac{C}{\alpha^7}$$

cuius potestates dabunt

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2A}{\alpha^4} + \frac{2B + AA}{\alpha^6}$$

$$\omega^3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{3A}{\alpha^5} + \frac{3AA + 3B}{\alpha^7}$$

$$\omega^4 = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{4A}{\alpha^6}$$

$$\omega^5 = \frac{1}{\alpha^5} + \frac{5A}{\alpha^7}$$

$$\omega^6 = \frac{1}{\alpha^6}$$

$$\omega^7 = \frac{1}{\alpha^7}$$

Substituantur igitur isti valores et termini in columnas disponantur secundum potestates ipsius α, sequenti modo:

$\frac{1}{\alpha^0}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha^6}$
1			
-1	$-A$	$-B$	$-C$
	$+\frac{1}{2}$	$+1A$	$+\frac{2B+AA}{2}$
	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2}A$	$+\frac{AA}{2} + \frac{B}{2}$
		$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}A$
		$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24}A$
			$+\frac{1}{144}$
			$+\frac{1}{5040}$

Quia

Quia prima columna per se euanescit, singulae sequentium seorsim ad nihilum redigantur, vnde prodibunt sequentes aequationes:

$$-A+\tfrac{2}{3}=0;\ -B+\tfrac{3}{2}A-\tfrac{2}{15}=0;\ -C+\tfrac{3}{2}B+AA-\tfrac{13}{24}A+\tfrac{1}{140}=0.$$

Ex harum prima reperitur $A=\frac{2}{3}$, qui valor substitutus in secunda dat $B=\frac{13}{15}$, et $-C+\frac{13}{10}+\frac{4}{9}-\frac{13}{36}+\frac{1}{140}=0$, vnde $C=\frac{146}{105}$.

§. 24. His itaque inuentis angulus quaesitus ω ita exprimitur vt sit

$$\omega=\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{\alpha^3}+\tfrac{13}{15.\alpha^5}+\tfrac{146}{105.\alpha^7}$$

existente $\alpha=(2n+\frac{1}{2})\pi$; vbi notandum est arcum ω hoc modo exprimi in partibus radii; vnde is in minutis secundis reperietur, si a logarithmo ω subtrahatur 4,6855749. Hanc autem reductionem statim obtinebimus, si a logarithmis numeratorum illorum quatuor hic logarithmus constans statim subtrahatur; scilicet primae fractionis logarithmus est $5,3144251-l\alpha$; secundae fractionis logarithmus est $5,1383338-3\,l\alpha$; tertiae partis logarithmus est $5,2522772-5\,l\alpha$ et logarithmus quartae fractionis $5,1712615-7\,l\alpha$.

§. 25. Sumamus nunc pro n successiue 1, 2, 3, 4 etc. et quum sit $\pi=3,14159265$ etc. habebimus sequentes valores pro logarithmo α, vnde reperitur

si $n=1$ erit $\mathrm{Log}.\,\alpha=0,6732411$; $\omega=12°,32',24''$
si $n=2$ erit $\mathrm{Log}.\,\alpha=0,8950898$; $\omega=7°,22',32''$
si $n=3$ erit $\mathrm{Log}.\,\alpha=1,0412178$; $\omega=5°,14',23''$
si $n=4$ erit $\mathrm{Log}.\,\alpha=1,1503623$; $\omega=4°,3',59''$
si $n=5$ erit $\mathrm{Log}.\,\alpha=1,2375225$; $\omega=3°,19',24''$.

§. 26. Quum igitur posuissemus $\Phi=(2n+1)\pi-2\omega$ pro qualibet cuspide habebimus abscissam

$$x=\tfrac{1}{4}c(1-\mathrm{cos}.\,2\omega)=\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{sin}.\,\omega^2$$

et

[illegible] applicatam

$y = \frac{1}{4} c$ fin. $2\omega = \frac{1}{2} c$ fin. ω. cof. ω

ita vt fit $\frac{y}{x} =$ tang. ω; deinde vero angulus

[illegible] A T M $= \omega - n.\pi = n\pi + \omega$,

feu fimpliciter $= \omega$, ex quibus fingularum cufpidum pofitio innotefcit.

Problema III.

§. 27. *In genere inveftigare curuas Brachyftochronas, quomodocunque celeritates per binas coordinatas* x *et* y *determinentur.*

Solutio.

§. 28. Sit curua A M brachyftochrona quaefita, in cuius puncto M fit celeritas functio quaecunque coordinatarum x et y, quam ponamus $= \frac{1}{v}$, fitque $dv = m\,dx + n\,dy$. Quia igitur tempus per arcum A M eft $\int v\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$ idque debet effe minimum, in forma noftra generali fit $Z = v\sqrt{(1+pp)}$ hincque $M = m\sqrt{(1+pp)}$, $N = n\sqrt{(1+pp)}$ et $P = \frac{vp}{\sqrt{(1+pp)}}$; quare quum pro curua quaefita fit $0 = N - \frac{dP}{dx}$, habebimus fequentem aequationem:

$$0 = n\,dx\,\sqrt{(1+pp)} - d\left(\frac{vp}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = n\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$$

[illegible] $- \frac{p(m\,dx + n\,dy)}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{v\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$;

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{n\,dx - m\,dy}{v} = \frac{dp}{1+pp},$$

quam, quibusnam in cafibus integrare liceat, inueftigemus.

§. 29. Vt priorem partem integrabilem reddamus, multiplicemus per

$$\frac{dv}{n\,dx - m\,dy} = \frac{m\,dx + n\,dy}{n\,dx - m\,dy} = \frac{m + np}{n - mp}$$

vt prodeat haec aequatio: $\frac{dv}{v} = \frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$, cuius ftatim duo fe offerunt cafus, quibus ea integrationem admittit:

 alter

alter si $n = 0$, alter vero si $m = 0$; quos ambos data opera euoluamus.

§. 30. Sit igitur primo $n = 0$, quod euenit si v fuerit functio ipsius x tantum, quae sit $v = X$; ac tum aequatio nostra erit: $\frac{dv}{v} = \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p(1+pp)}$, cuius integrale est

$$LX = LV(1+pp) - Lp + LA$$

sicque fiet $X = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p}$, vnde colligitur

$$p = \frac{A}{\sqrt{(XX-AA)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{X}{\sqrt{(XX-AA)}};$$

tum vero, ob $dy = p\,dx$, aequatio pro brachystochrona resultat $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$; vbi notandum, constantem arbitrariam A infinitas huiusmodi brachystochronas comprehendere. Sequens autem integratio ita expediri potest, vt curua in dato puncto, verbi gratia in A, incipiat: at vero formula minimi pro hoc casu erit $\int \frac{X^2\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$.

§. 31. Sit iam $m = 0$, siue v functio solius y, quae sit $v = Y$ atque nostra aequatio fit: $\frac{dv}{v} = \frac{dY}{Y} = \frac{p\,dp}{1+pp}$, cuius integrale est $LC = LV(1+pp) + LA$, siue $Y = AV(1+pp)$, vnde fit

$$p = \frac{\sqrt{(YY-AA)}}{A} \text{ et } V(1+pp) = \frac{Y}{A}.$$

Hinc ob $p = \frac{dy}{dx}$ aequatio inter coordinatas colligitur $dx = \frac{A\,dy}{\sqrt{(YY-AA)}}$: at formula minimi pro his curuis erit $\int \frac{Y^2\,dy}{\sqrt{(YY-AA)}}$, qui casus a praecedente prorsus non discrepat, et ex eo per solam commutationem coordinatarum immediate deduci potuisset. Caeterum hic iterum effici potest, vt omnes istae curuae in eodem dato puncto incipiant.

§. 32. Praeter hos autem duos casus datur adhuc tertius hoc modo eruendus: alterum membrum $\frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$ resoluetur in duas fractiones, quarum alterius denominator sit $1+pp$, alterius vero $n-mp$, atque elicietur ista aequatio: $\frac{dv}{v} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{m\,dp}{n-mp}$, quae manifesto est integrabilis,

bilis, si fuerit $m = x$ et $n = y$, quod idem euenit, si fuerit $m = s\,x$ et $n = s\,y$; tum enim aequatio nostra

$$\frac{dv}{v} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{x\,dp}{y-px}$$

integrata dat

$$L\,v = L\sqrt{(1+pp)} - L(y-px) + L\,A,$$

siue $v = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$. Iam vero quantitatem v ex hac conditione definiri oportet: $dv = s(x\,dx + y\,dy)$; vnde perspicuum est s esse debere functionem ipsius $\sqrt{(xx+yy)}$, vnde etiam v aequabitur functioni eiusdem formulae $\sqrt{(xx+yy)}$. Hic quidem euidens est loco x et y sumi potuisse $x+a$ et $y+b$: at quia hoc non curuae mutarentur sed tantum positio axis, hanc varietatem considerare superfluum foret. Quare si initium harum curuarum detur, veluti in A, tum non opus est, vt pro hoc puncto sit $x = 0$ et $y = 0$, sed quantitates constantes quaecunque admitti possunt.

§. 33. Quodsi ergo v fuerit functio quaecunque quantitatis $\sqrt{(xx+yy)}$, pro brachystochronis habebimus hanc aequationem:

$$v(y-px) = A\sqrt{(1+pp)},$$

ex qua elicimus

$$p = \frac{vvxy \pm A\sqrt{(vv(xx+yy) - AA)}}{vvxx - AA}.$$

Quia nunc $p = \frac{dy}{dx}$, nanciscimur hanc aequationem differentialem:

$$dy(vvxx - AA) = vvxy\,dx \pm A\,dx\sqrt{(vv(xx+yy) - AA)}$$

quam autem, quomodo tractare oporteat, ex hac forma vix patet.

§. 34. Vtamur autem sequenti substitutione: ponamus $\sqrt{(xx+yy)} = u$, et $y = t\,x$, ita vt aequatio ad binas tantum variabiles t et u sit reducenda; at per eas x et y ita determinantur, vt sit $x = \frac{u}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+tt)}}$, ex quorum differentialibus colligitur

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{t\,du(1+tt) + u\,dt}{du(1+tt) - ut\,dt}$$

qui valores, in superiori expressione pro p inuenta substituti, praebent

$$\frac{t\,du(1+tt)+u\,dt}{du(1+tt)-ut\,dt} = \frac{vvtuu \pm A(1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)}}{vvuu - AA(1+tt)}$$

quae à fractionibus liberata abit in hanc:

$$u\,dt(vvuu - AA(1+tt)) + t\,du(1+tt)(vvuu - AA(1+tt))$$
$$= -ut\,dt(vvtu\omega \pm A(1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)}$$
$$+ du(1+tt)(vvtuu \pm A)1+tt)\sqrt{(vvuu-AA))} \text{ seu}$$
$$0 = u\,dt(1+tt)(vvuu - AA \pm A\sqrt{(vvuu-AA)})$$
$$-A\,du(1+tt)^2(A \pm \sqrt{(vvuu-AA)}).$$

Haec aequatio reducitur ad hanc:

$$\frac{dt}{1+tt} = \frac{A\,du(A \pm \sqrt{(vvuu-AA)})}{u(vvuu - AA \pm A\sqrt{(vvuu-AA)})}$$

quae manifesto in hanc formam transfunditur:

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm \frac{A\,du}{u\sqrt{(vvuu-AA)}}$$

vbi ambae variabiles t et u a se inuicem sunt separatae, ideoque hinc curuas construere licet.

§. 35. Num autem praeter hos casus alii adhuc dentur, qui constructionem admittant, merito dubitamus, nisi forte quis adiungere velit eiusmodi casus, qui per immutationem coordinatarum resultant, dum ipsae lineae curuae prorsus manent eaedem. Ita aequatio primo inuenta $\frac{dv}{v} = \frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$ etiam integrabilis euadit, sumendo $m = \alpha s$ et $n = \beta s$, siquidem hinc oritur ista aequatio:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(\alpha+\beta p)}{(1+pp)(\beta-\alpha p)} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{\alpha\,dp}{\beta-\alpha p},$$

cuius integrale fit $Lv = L\sqrt{(1+pp)} - L(\beta-\alpha p) + LA$ siue $v = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{\beta-\alpha p}$. Quoniam vero tum fit $dv = s(\alpha\,dx + \beta\,dy)$ euidens est quantitatem v fore functionem formulae $\alpha x + \beta y$. Vnde si coordinatae ita mutentur, vt $\alpha x + \beta y$ iam fiat ipsa

ipsa abscissa, habebitur casus, quo v est functio quaecunque abscissae, qui igitur conuenit cum casu nostro primo.

§. 36. Calculus hic non parum molestus facilius ita expediri potest. Quum sit $p = \frac{t\,du(1+tt)+u\,dt}{du(1+tt)-ut\,dt}$, erit $y - px = \frac{-uuu\,dt\sqrt{(1+tt)}}{du(1+tt)-ut\,dt}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{(1+tt)((1+tt)du^2+uu\,dt^2)}}{du(1+tt)-ut\,dt}$, vnde aequatio primo inuenta $v(y-px) = A\sqrt{(1+pp)}$ transmutatur in hanc:

$$-vuu\,dt = A\sqrt{((1+tt)du^2+uu\,dt^2)}$$

ex qua sumtis quadratis elicitur

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm\frac{A\,du}{u\sqrt{(vvuu-AA)}}$$

prorsus vt ante. Caeterum euidens est, hanc curuam esse brachystochronam, pro vi centripeta, functioni cuicunque distantiarum proportionali.

§. 37. In his igitur tribus casibus solutionem perducere licuit ad aequationes differentiales primi gradus, quae ob constantem A, si ea successiue varietur, infinitas curuas huius generis complectuntur; atque si hae aequationes denuo integrentur, noua constans introducenda ex dato cuiusque curuae initio A definiri poterit. Hoc modo ergo effici potest, vt omnes illae infinitae brachystochronae ex eodem puncto A originem ducant, atque ad hunc casum sequens Problema est accommodatum.

Problema IV.

§. 38. *Descriptis in plano infinitis brachystochronis* AM *inuenire curuas, quae illas omnes orthogonaliter traiiciant.* Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

§. 39. Sit AM vna harum brachystochronarum quaecunque, ad quam in puncto M constituatur recta normalis Ma, atque supra ostendimus, si infinitae aliae lineae Aμ, ipsi AM proximae et ad hanc rectam Ma terminatae, quae quidem in eodem puncto A incipiant, concipiantur, tum

 varia-

variationem temporis pro iis omnibus fore nullam, siue tempus per curuam proximam A μ praecise aequale esse tempori per A M, vbicunque punctum μ in recta M a accipiatur, dummodo ipsi M fuerit proximum. Verum ne opus sit demonstrationem huius veritatis altius repetere, hic eam succinctius ex ipsa natura brachystochronismi doceamus.

Tab. I. Fig. 4. §. 40. Demonstrandum scilicet est: vt arcus proximi AM et A μ sint isochroni elementum M μ necessario ad vtramque curuam normale esse debere. Si quis enim hoc negauerit, ei statuendum est, angulum A M μ vel esse acutum vel obtusum; vtrumque autem ad absurdum sequenti modo deducetur. Sit enim primo angulus A M μ acutus, et ad M μ ex puncto μ agatur normalis μ α, curuae A M in α occurrens, eritque $\alpha\mu < \alpha M$; vnde si corpus percurrat viam A α μ, eam absoluet breuiori tempore, quam viam AαM, quia vtrinque in α celeritas est eadem, at spatium $\alpha\mu$ breuius quam α M. Quum igitur per hypothesin tempus per curuam A μ aequale sit tempori per A M, nunc tempus per A α μ breuius foret quam tempus per A μ, ideoque ipsa linea A μ non foret brachystochrona, quod est contra hypothesin, quandoquidem hic assumimus curuam A μ esse brachystochronam ipsi A M proximam.

§. 41. Simili modo si angulus A M μ fuerit obtusus, ad M μ ex puncto M agatur normalis M α, erit $\alpha M < \alpha\mu$; vnde tempus per viam A α μ breuius foret quam per A α μ, ideoque etiam breuius quam per A M, ideoque curua A M non foret brachystochrona, itidem contra hypothesin. Ex quo conficitur, lineolam M μ necessario ad vtramque brachystochronam A M et A μ esse perpendicularem.

§. 42. Quod si ergo ab omnibus nostris brachystochronis arcus synchronos A M et A μ abscindamus, qui

Fig. 3. scilicet omnes eodem tempore absoluantur, tum omnia puncta M μ reperientur in eiusmodi linea curua, quae om-

omnes brachystochronas ad angulos rectos secabit. Quum igitur tempus elementare supra fuerit $v\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, a quolibet brachystochronarum AM rescindatur arcus AM, pro quo formula integralis $\int v\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$ nanciscatur valorem datum, puta C. Ex quo simul perspicuum est, si etiam haec quantitas C varietur, hoc modo infinitas traiectorias orthogonales esse prodituras.

§. 43. Quae quo clariora reddantur, consideremus casum primum supra §. 30. descriptum, in quo pro curuis brachystochronis inuenimus hanc aequationem differentialem $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$; vbi quidem variabilitas litterae A infinitas nostras brachystochronas producit: verum insuper haec conditio absolute necessaria adiungi debet, vt omnes istae curuae idem commune habeant initium in puncto A. Hoc ergo obseruato, capiatur punctum M ita, vt formula integralis $\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$ datum obtineat valorem, puta C; vbi iterum probe tenendum est, hoc integrale ita capi debere, vt in initio A euanescat; tum autem punctum M simul erit in traiectoria orthogonali.

§. 44. Vt exemplo rem illustremus sumamus $X = \sqrt{x}$ et $A = \sqrt{a}$, vt aequatio pro curuis secandis habeatur $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}}$, seu integrando $2\sqrt{(ax-aa)} = y + const.$ vbi constantem ita definire oportet, vt omnes curuae in eodem puncto A incipiant. Ponamus ergo pro hoc initio sicuti $x = f$ et $y = g$, ita vt hae litterae neutiquam ab a pendeant. Quare, vt hoc eueniat, constans illa debet esse $2\sqrt{(af-ga)} - g$, sicque pro curuis secundis habetur haec aequatio: $2\sqrt{(ax-aa)} - 2\sqrt{(af-aa)} = y - g$; vbi euidens est litteram a, etsi variabilem, vltra f augeri non posse. Tum autem pro traiectoriis capi debebit $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)}} = C$, et integrando vt supra est praescriptum, scilicet vt integrale pro initio A euanescat:

2 (

$$2\left(\tfrac{2}{3}a+\tfrac{1}{3}x\right)\sqrt{(x-a)}-2\left(\tfrac{2}{3}a+\tfrac{1}{3}f\right)\sqrt{(f-a)}$$
quod cuipiam quantitati datae, puta c, aequale positum dat:
$$(2a+x)\sqrt{(x-a)}-(2a+f)\sqrt{(f-a)}=\tfrac{3c}{2}.$$
Ex qua aequatione pro data curua A M, ad quam A refertur, definiatur abscissa x, indeque porro applicata y ope aequationis superioris:
$$y=2\left(\sqrt{(ax-aa)}-\sqrt{(af-aa)}\right)+g,$$
vt innotescat punctum M. At si quis desideret aequationem pro traiectoria ista orthogonali inter easdem coordinatas x et y, is tantum ex binis aequationibus inuentis quantitatem a eliminet, vt obtineat aequationem, in qua tantum occurrant litterae x, y cum constantibus f, g et c. Hac enim aequatione natura traiectoriae exprimetur.

§. 45. Ex hoc exemplo perspicuum est, quomodo huiusmodi casus tractari oporteat, vbi integratio non succedit: semper enim integratio tamquam cognita est spectanda, etiamsi fuerit transcendens, quo pacto quasi nouae litterae f et g ingrediuntur, quippe quae sunt coordinatae pro initio curuarum dato; deinde vero ipsa rei natura satis monstrat, quomodo reliquae operationes suscipi debeant.

§. 46. Cum olim problema traiectoriarum orthogonalium tanto studio esset tractatum, casus quem modo euoluimus imprimis omni attentione dignus est visus, atque hoc modo erat vere enunciatus:

Si curuarum secundarum natura expressa fuerit tali aequatione differentiali: $dy=\frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$, tum traiectoria determinari debet ex hac aequatione: $\int\frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}=C$. Verum sequentes conditiones necessario subintelligi debent: vt primo omnes curuae secundae in communi quodam puncto incipiant; deinde vt posterius integrale in ipso illo initio euanescat.

DE